

# Proyección de cifras de producción de café colombiano utilizando cadenas de Markov

Artículo de Investigación Científica - Fecha de recepción: 6 de marzo de 2013 - Fecha de aceptación: 15 de mayo de 2013

Yenny Londoño Salazar

Estudiante de Ingeniería Industrial. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Colombia. yelondono@utp.edu.co

Mónica Gómez Arango

Estudiante de Ingeniería Industrial. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Colombia. monica.gomez@outlook.com

Eliana Toro Ocampo

Ingeniera Industrial. Magíster en Ingeniería Eléctrica y Magíster en Investigación de Operaciones y Estadística. Docente de la Facultad de Ingeniería Industrial. Universidad Tecnológica de Pereira. Pereira, Colombia. elianam@utp.edu.co

Para citar este artículo / to reference this article:

Y. Londoño, M. Gómez, and E. Toro, "Proyección de cifras de producción de café colombiano utilizando cadenas de Markov," *INGE CUC*, vol. 9, no. 1, pp. 83-97, Jun. 2013.

## RESUMEN

El café es considerado el producto agrícola más importante en Colombia, además de ser un gran símbolo en su carta de presentación; sin embargo, el peso relativo de la caficultura aportado al PIB ha disminuido notablemente en los últimos años, reflejado en un descenso en la producción de sacos de café, situación que afecta directamente la cantidad exportada, dando lugar a una pérdida significativa de participación en el mercado mundial de este producto. En este artículo se presenta un estudio sobre el modelamiento matemático del número de sacos de 60 kg de café exportados, aplicando cadenas de Markov discretas en el estado y continuas en el tiempo, utilizando los datos históricos de producción de café para los meses comprendidos entre enero de 2010 y octubre de 2012. Los resultados obtenidos mediante esta técnica matemática muestran que las metas propuestas por el Comité de Cafeteros no se cumplirán si no hay una intervención eficiente en este mercado.

## Palabras clave

Estadísticas, exportación, procesos estocásticos, probabilidad, café de Colombia, variable aleatoria, cadenas de Markov.

## *Financial Projections of Colombian Coffee Production Using Markov Chain*

### **ABSTRACT**

Coffee is considered the most important agricultural product in Colombia and is a great symbol of the country in the world. Nonetheless, the relative importance of the coffee sector contribution to GDP has declined markedly in recent years. This is reflected in a decrease of coffee bags production, situation which directly affects the quantity exported and results in a significant loss of global market share of coffee. This paper presents a study on the mathematical modeling of a number of 60 kg bags of coffee exported with discrete-state and continuous-time Markov chains and using coffee production historical data for the months between January 2010 and October 2012. The results obtained by this mathematical technique, show that the goals proposed by the Coffee Committee will not be met if there is not an effective intervention in this market.

### **Key words**

Statistics, export, stochastic processes, probability, Colombian coffee, random variable, Markov chain.

## INTRODUCCIÓN

El peso relativo de la caficultura dentro del conjunto de la economía nacional ha caído significativamente, no solo debido al estancamiento de la producción y de las exportaciones, que en términos absolutos han disminuido notablemente durante los últimos años, sino también por el crecimiento significativo de otros sectores, en particular el minero-energético, cultivos de palma de aceite, frutales y flores.

La participación del café pergamino en el PIB (producto interno bruto) pasó del 25% a finales de la década del setenta a un poco más del 6% hoy. En el PIB total, la participación del café cayó al 0,6% en 2011 de un 3% registrado a comienzos de la década de los ochenta. La producción alcanzó su techo histórico en los años 1991 y 1992, con 16 millones de sacos de 60 kilos de café verde. En 2006 y 2007 la producción anual fue de 12 millones de sacos y a partir de este momento, ha mostrado una tendencia decreciente que llevó la producción a los niveles del periodo 1958-1977, durante el cual pocas veces la producción superó los 8 millones de sacos [1].

Según Machado [2], profesor de la Universidad Nacional de Colombia en Ciencias Económicas, el café en una perspectiva histórica ha sido el único producto que ha logrado estabilizar el crecimiento económico a través de las exportaciones, pese a las recurrentes crisis de precios en el mercado internacional. Lo anterior, dado que el café explica en buena medida la actividad económica durante gran parte del siglo XX.

Así, el café se muestra como un commodity importante para la explotación y

crecimiento de la economía colombiana; desde el punto de vista de su consumo, el café es uno de los productos de mayor uso cotidiano en el planeta, debido a que es una bebida asociada con ocasiones de consumo de carácter social, que ha penetrado en la cultura y se ha convertido con el paso del tiempo en un instrumento para relacionarse en diversas sociedades en todo el mundo.

El objetivo de este documento es analizar las cifras de café colombiano exportado a través de herramientas estadísticas, con el fin de predecir su comportamiento futuro. La cantidad de café exportada constituye una variable aleatoria que se puede modelar mediante el uso de procesos estocásticos. Utilizando herramientas matemáticas se pretende observar el comportamiento de esta variable a lo largo del tiempo, para predecir el desarrollo de la producción de café, dando lugar a posibles acciones de mejora o solución a las problemáticas planteadas, dado que es el café un símbolo colombiano de gran importancia, que ha posicionado al país como un productor y exportador de café de alta calidad, además de ser un canal de distribución de riqueza para muchas familias campesinas que se dedican a este tipo de cultivo.

La metodología expuesta en el presente estudio podría utilizarse con el fin de establecer la situación actual y futura en cuanto a la producción y posible exportación de café para implementar estándares e índices que fomenten la optimización de su cultivo, avances tecnológicos, subsidios para los caficultores y que en general aporten la información necesaria para implementar un proceso de mejora que arroje resultados positivos tan-

to para la situación de los cultivadores como para la economía nacional.

El método utilizado fue aplicado en trabajos anteriores como “Modelo probabilístico para los fenómenos de transferencia entre programas de pregrado y de deserción estudiantil” [3] y “Aplicación de cadenas de Markov continuas a las estadísticas de secuestro en Colombia” [4], donde los resultados que se obtuvieron muestran la aplicación efectiva del método de cadenas de Markov discretas en el estado y continuas en el tiempo, aplicado a problemas reales como la deserción estudiantil en la Universidad Tecnológica de Pereira y el secuestro en Colombia producto del conflicto armado, grupos terroristas y extorsión.

## ACTUALIDAD ECONÓMICA DEL CAFÉ

Los altos precios de los combustibles que incrementan los costos de transporte y fertilizantes han estimulado la investigación dirigida a extraer combustibles de productos agrícolas, lo que ha impactado directamente los precios de algunos alimentos como maíz, azúcar y aceites vegetales. Se estima que el 13% de la producción mundial de cereales secundarios, el 15% de la producción de aceites vegetales y el 30% de la producción de caña de azúcar se utilizará para la producción de biocombustibles [5]. En estudios recientes se dice que el café podría ser insumo en la producción de combustibles orgánicos [6].

Las perturbaciones meteorológicas como los fenómenos de El Niño y La Niña, el cambio climático global, el ciclo biológico de las plantas, las prácticas de renovación, el envejecimiento y

la caída de rendimiento de las plantaciones así como el aumento en los precios de los combustibles y fertilizantes, son variables que inciden en el balance producción-inventarios-consumo así como en los precios internacionales.

Con respecto al consumo mundial que viene en ascenso, Colombia muestra un mercado deterioro con respecto a otras naciones que evidencian una tendencia al aumento en su producción, incluido Brasil, país que sigue a la cabeza en las exportaciones mundiales. Los consumos internos tienen el siguiente panorama: Brasil, 5,6 kilos por habitante; Estados Unidos, 4,1 kilos; y Colombia, 1,8 kilos; en los países desarrollados el consumo se ha mantenido estable en los últimos años a pesar de las crisis económicas por las que atraviesan [1].

La mayor parte de los productores de café de Colombia son pequeños productores poseedores de fincas pequeñas, por lo que el café se convierte en un canal de distribución de riqueza importante pues se reparte entre una amplia base poblacional, a diferencia de otros productos de exportación como el petróleo o las piedras preciosas, donde la riqueza solo se reparte entre los grandes explotadores o multinacionales. Según Café de Colombia [7] existen más de 563.000 familias productoras de café, además de que el café ha creado un modelo institucional que ha logrado corregir buena parte de las distorsiones que se genera en un mercado de grandes compradores y pequeños vendedores, permitiendo que se generen recursos de inversión social y ambiental bajo los programas de sostenibilidad en acción.

## Exportación de café

En la década del setenta el café contribuyó con el 54% de las exportaciones de bienes totales, mientras el petróleo y sus derivados sumaban el 6%. En los ochenta el café participó con el 42% y el petróleo con el 13%. En los noventa el petróleo con el 21% y el café con el 18%. En la primera década del nuevo siglo el café corresponde al 5,9% y el petróleo al 27,2% [1].

Antes de la liberación del comercio internacional del café, con el rompimiento del pacto de cuotas en 1989, que regulaba los precios a través del establecimiento de contingentes fijos de exportación, la transmisión del precio externo al local era inexistente. Un efecto tan alto de los precios internacionales con los precios locales no es tan alto en Colombia, ya que hay políticas que lo impiden, tales como la existencia de

franjas de precios. La variación de precios del café a nivel internacional y nacional se muestra en la Fig. 1.

Durante mucho tiempo Colombia ocupó el segundo lugar en volumen de exportación en el mundo detrás de Brasil, con la diferencia de que Colombia siempre se destacó por exportar un café de mejor calidad; sin embargo, en los últimos cuatro años aproximadamente, las metas propuestas por la Federación Nacional de Cafeteros de Colombia no han sido satisfechas y Colombia ha ido perdiendo escalafones a nivel mundial hasta el punto de ocupar actualmente el cuarto lugar en volumen de exportación, detrás de Honduras. Según la revista Dinero [8] ahora Honduras es el tercer exportador del mundo y no Colombia. El invierno y la baja producción pasaron factura al gremio cafetero, pues se debe tener en cuenta que los volúmenes de exportación dependen de los volúmenes de producción del país en la época de cosecha.

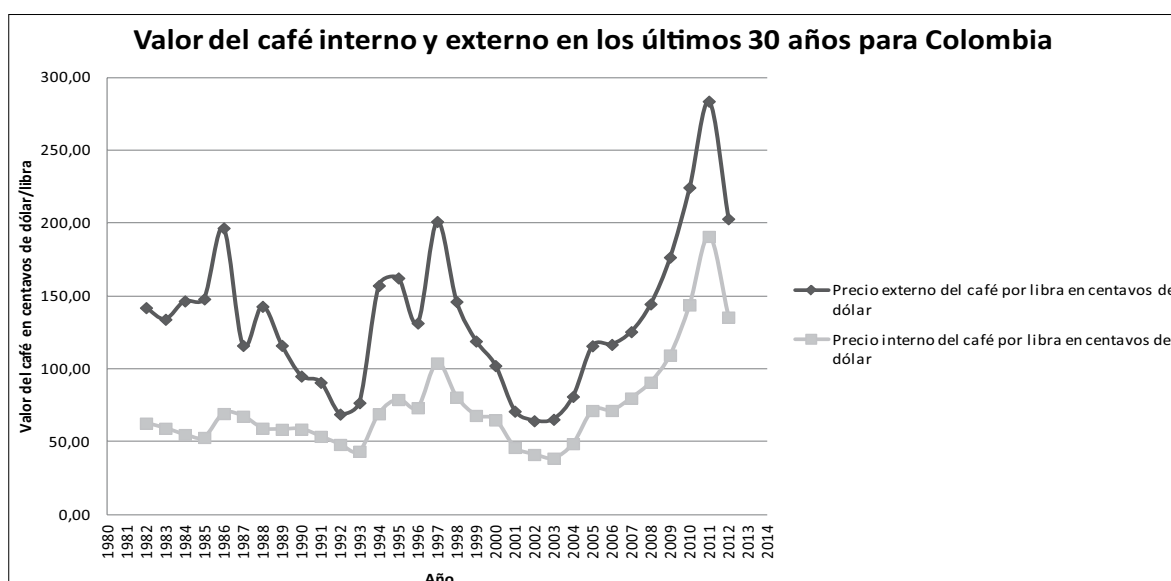


Fig 1. Valor del café nacional e internacional

Fuente: Elaboración propia, con base en [1].

Debido al terreno montañoso que caracteriza el lugar de siembra y cosecha del café en Colombia, ha sido complicado un avance en la tecnificación que aumente así la producción, sobre todo a la hora de recoger el grano maduro; sin embargo, se debe tener en cuenta que debido a este carácter manual de recolección que se presenta en el país, Colombia sigue exportando el café con mayor calidad en el mundo pues no se corre el riesgo de recoger granos de mala calidad o inadecuados, que puedan dañar el sabor o la textura del producto.

Con todo lo anterior, las estadísticas mostradas en la página web de la Federación Nacional de Cafeteros de Colombia, se puede observar los volúmenes de producción de sacos de café de 60 kg entre el año 2010 y 2012, como se muestra en la Tabla 1.

## TRATAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS DATOS

A través de un diagrama de flujo se muestra el proceso seguido para el tratamiento respectivo de los datos de producción de café de la Tabla 1, con el fin de obtener resultados que permitan analizar el comportamiento de esta variable en el tiempo (Fig. 2).

### Prueba de aleatoriedad

Esta prueba se aplica con el fin de asegurar que los datos ofrecidos en la Tabla 1 sean aleatorios, ya que los modelos probabilísticos deben ajustarse únicamente a datos que provengan de un fenómeno o proceso aleatorio [9].

Para aplicar esta prueba se debe conservar la secuencia cronológica en que se produjeron los datos. Si los datos se or-

TABLA 1. VOLUMEN DE PRODUCCIÓN COLOMBIANA DE CAFÉ - MENSUAL EN MILES DE SACOS DE 60 KG DE CAFÉ VERDE EQUIVALENTE [13]

Volumen de producción colombiana de café					
Mes	Producción	Mes	Producción	Mes	Producción
ene-10	515	ene-11	908	ene-12	535
feb-10	648	feb-11	764	feb-12	571
mar-10	629	mar-11	779	mar-12	576
abr-10	647	abr-11	523	abr-12	580
may-10	822	may-11	673	may-12	689
jun-10	780	jun-11	471	jun-12	714
jul-10	787	jul-11	530	jul-12	668
ago-10	615	ago-11	466	ago-12	565
sep-10	530	sep-11	459	sep-12	519
oct-10	807	oct-11	656	oct-12	653
nov-10	979	nov-11	845		
dic-10	1.164	dic-11	735		

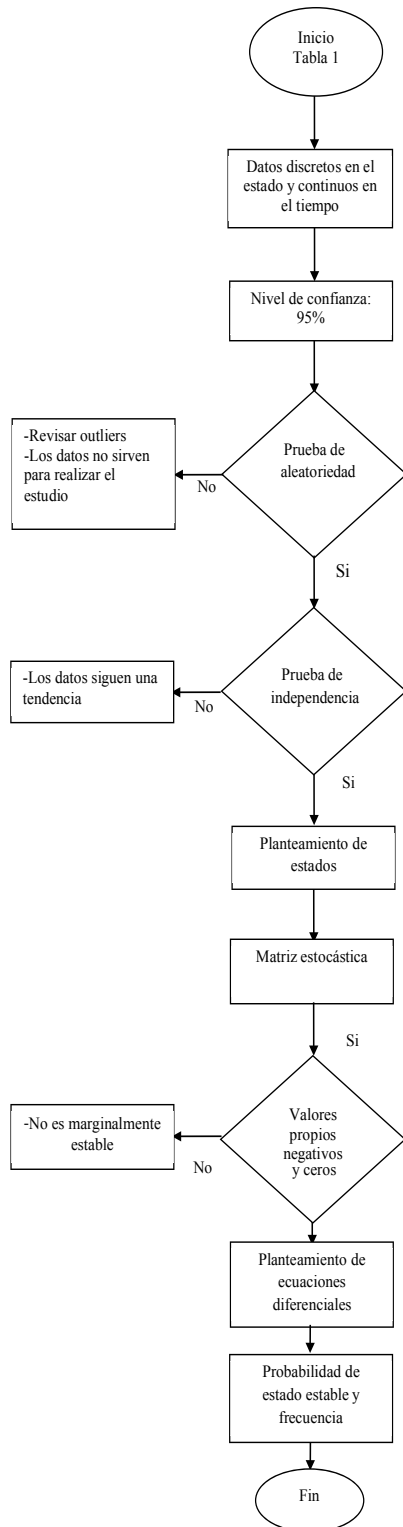


Fig 2. Diagrama de flujo del proceso para el tratamiento de los datos de producción de café de la Tabla 1

Fuente: Elaboración propia, con base en [9].

denan por orden de magnitud se altera la sucesión de datos continuos mayores y menores a la media.

Para la prueba de aleatoriedad se supone que los datos tienen una distribución normal  $z$ , con un nivel de confianza del 95%, donde:

Hipótesis nula: Los datos son aleatorios

Hipótesis alterna: Existe un patrón en los datos que se repite con frecuencia, es decir, existe tendencia en el proceso o fenómeno que produce los datos.

Criterio de decisión: Se rechaza la hipótesis nula si  $z < -z_{\alpha/2}$  o  $z > z_{\alpha/2}$ . Donde  $z_{\alpha/2} = \pm 1.96$ ; lo anterior se calcula mediante (1).

$$z = \frac{U - \mu_u}{\sigma_u} \quad (1)$$

Donde

$$\mu_u = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} + 1 \quad (2)$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2 (n_1 + n_2 - 1)}} \quad (3)$$

$z$ : Estadístico de prueba

$U$ : Sucesión de datos continuos menores o mayores a la media.

$\mu_u$ : Promedio de la sucesión de los datos

$\sigma_u$ : Desviación estándar

$n_1$ : Cantidad de datos menores a la mediana de la muestra

$n_2$ : Cantidad de datos mayores a la mediana de la muestra



Aplicando las fórmulas propuestas de (1), (2) y (3), se obtienen los siguientes resultados:

$$n_1 = 12$$

$$n_2 = 21$$

$$U = 12$$

Promedio de sucesión de datos = 16,272727

Desviación estándar = 2,609977

Estadístico de prueba = -1,63707458

Como  $[-1,63 < -1,96]$  = Es falso, se acepta hipótesis nula.

La mediana de los datos corresponde a 650,5; es decir, este sería el valor que está justo en la mitad de las 34 observaciones de Tabla 1, si se organizara la sucesión de datos de menor a mayor. Según los resultados obtenidos el estadístico de

prueba, demuestra que cae en la zona de aceptación y por lo tanto la hipótesis nula se acepta, demostrando que los datos son aleatorios.

### Prueba de independencia de los datos

Un gráfico de dispersión es una herramienta que sirve para determinar la independencia de datos. Si se tiene una muestra  $n$  de datos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  no negativos y ordenados cronológicamente, el diagrama de dispersión es una gráfica de parejas  $(x_i, x_{i+1})$  para  $i = 1, 2, \dots, (n - 1)$ . A continuación se muestra, a través de un gráfico de dispersión simple, la independencia de los datos sin que estos muestren algún tipo de correlación entre ellos. El eje  $y$  representará los meses numerados del 1 al 34 (Fig. 3).

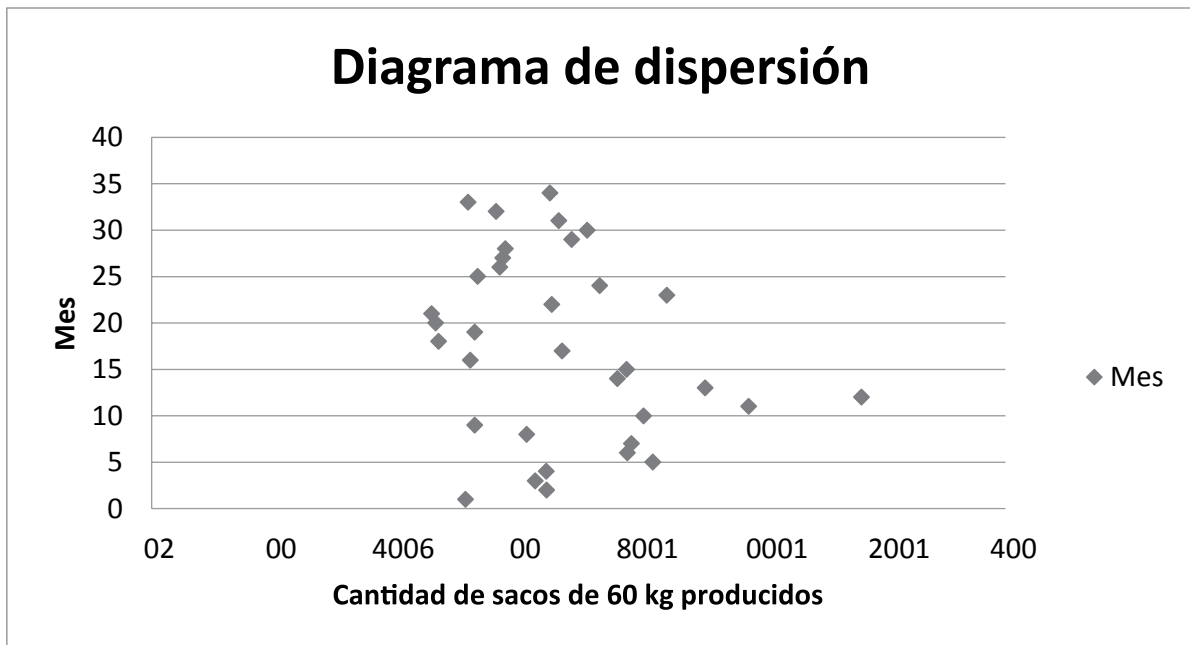


Fig. 3. Diagrama de dispersión, prueba de independencia de datos

Fuente: Elaboración propia.



Como se puede observar en el gráfico de dispersión, los datos no se relacionan entre sí (no siguen una tendencia) y por lo tanto la independencia de los datos se cumple.

Como ambas condiciones (aleatoriedad e independencia) se cumplieron, se puede continuar con la investigación, pues si no fuera así la variable tendría que ser descartada sin poder hacerse ningún tipo de predicción sobre ella.

## CADENAS DE MARKOV DISCRETAS EN EL ESTADO Y CONTINUAS EN EL TIEMPO

### Proceso estocástico y cadenas de Markov discretas en el estado continuas en el tiempo

Un proceso estocástico [10] se define como una colección indexada de variables aleatorias  $\{X_t\}$ , donde el índice  $t$  toma valores de un conjunto  $T$  dado. El interés de los procesos estocásticos es describir el comportamiento de un sistema en operación durante algunos períodos.

Para el caso de estudio donde el tiempo es continuo y los estados discretos, se etiquetan los estados posibles del sistema  $0, 1, \dots, M$ , donde  $M \in \mathbb{Z}$ . Comenzando en el tiempo  $0$  y dejando que el parámetro de tiempo  $t'$  corra de manera continua para  $t' \geq 0$ , sea la variable aleatoria  $X(t')$  el estado del sistema en el tiempo  $t'$ . Entonces  $X(t')$  toma uno de sus  $(M+1)$  valores posibles en un intervalo  $0 \leq t' < t_1$ , después salta a otro valor en el siguiente intervalo  $t_1 \leq t' < t_2$  y así, sucesivamente, donde los puntos de tránsito  $(t_1, t_2, \dots)$  son puntos aleatorios en el tiempo (no necesariamente enteros).

Es importante tener en cuenta que una cadena de Markov de tiempo continuo, quiere decir que, dado el presente, el futuro y el pasado son independientes.

### Planteamiento de la matriz estocástica

En las cadenas de Markov de tiempo continuo estado discreto [4], se obtienen las probabilidades de ocurrencia de cada uno de los estados del sistema como funciones del tiempo que se describen mediante ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes constantes (4).

$$[\dot{P}] = [P][A] \quad (4)$$

Donde

$\dot{P}$ : Es el vector final de las derivadas con respecto al tiempo de la probabilidad de cada uno de los estados como función del tiempo.

$P$ : Es el vector fila de las probabilidades de cada uno de los estados como función del tiempo.

$A$ : Es la matriz estocástica de tasas de transición entre estados (5).

$$\begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Donde

$$h_{ij} = \frac{\text{Número de transiciones del estado } i \text{ al estado } j}{\text{Horizonte de observación}}$$

$h_{ii}$  = Sumatoria negativa de los elementos de la fila

Para el caso de estudio, la matriz A se encontró después de haber organizado los datos de la Tabla 1 en intervalos, donde a cada dato de la tabla le correspondía un intervalo y por ende cada intervalo estaba indexado a un estado M. Tras la organización de los datos, estos se establecieron tal como se aprecia en la Tabla 2.

TABLA 2. INTERVALOS DE VOLUMEN DE PRODUCCIÓN INDEXADOS A UN ESTADO EN PARTICULAR

Estado	Intervalo	Frecuencia
1	459 - 600	13
2	601 - 742	11
3	743 - 884	7
4	885 - 1026	2
5	1027 - 1168	1

Fuente: Elaboración propia.

Después de asignar a cada dato su estado, según su intervalo, se tiene  $h_{ij}$  (6):

$$h_{ij} = \frac{\text{Número de transiciones del estado } i \text{ al estado } j}{34 \text{ meses de observación}} \quad (6)$$

Tras el cálculo de todos los  $h_{ij}$  y  $h_{ii}$ , la matriz de transiciones A, para el caso, queda planteada en la Fig. 4.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3/17 & 5/34 & 1/34 & 0 & 0 \\ 2/17 & -3/17 & 1/17 & 0 & 0 \\ 1/34 & 1/17 & -2/17 & 1/34 & 0 \\ 0 & 0 & 1/34 & -1/17 & 1/34 \\ 0 & 0 & 0 & 1/34 & -1/34 \end{vmatrix}$$

Fig. 4. Matriz estocástica de transiciones para volumen de producción de café

Se requiere calcular los valores y vectores propios de la matriz A, para así encontrar las ecuaciones diferenciales que permitan modelar el problema y así hallar la frecuencia con que se presenta un estado i y la posible duración media en cada estado; todo esto para hacer un posterior análisis del problema mediante la herramienta matemática.

### Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales para las cadenas de Markov discretas en el estado, continuas en el tiempo, se plantean mediante (7).

$$P(t) = \sum_{i=1}^n C_i V_i e^{\lambda_i t} \quad (7)$$

Donde

$C_i$ : Constante

$V_i$ : Vector propio

$\lambda_i$ : Valor propio

$t$ : Variable aleatoria indexada en el tiempo

Calculando los valores y vectores propios de la matriz A (Fig. 3), se obtuvieron los siguientes resultados:

$$\lambda_1 = -0.3104 \quad \lambda_2 = -0.1585 \quad \lambda_3 = -0.0736 \\ \lambda_4 = 0.0000 \quad \lambda_5 = -0.0163$$

Como se observa, todos los valores propios son negativos, mientras que uno de ellos es 0. Esta es la condición más importante para continuar con este tipo de proceso, pues significa que la producción de café es un proceso estocástico marginalmente estable; en caso contrario no se podría aplicar la metodología, pues un

proceso de Markov continuo en el tiempo tiene solución estable si y solo si todos los valores propios de A están ubicados en el plano izquierdo del plano complejo [3]. Si lo anterior no se hubiese cumplido, la variable aleatoria se hubiese modelado como una cadena de Markov discreta en el estado y en el tiempo.

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales debe tener un punto de comienzo o inicio que facilite encontrar las constantes para así reemplazar  $P(t)$  por  $P(0)$ , que sería el inicio del proceso en el  $t=0$ . Se asume que en el momento inicial la producción de café se ubicó en el primer intervalo o estado 1, por lo que el vector inicial se plantea así en la Fig. 5. Lo anterior se puede hacer debido a que la estabilidad de un sistema no depende de las condiciones iniciales dadas; el vector de condiciones iniciales es independiente.

$$P(0) = (1.0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

Fig 5. Vector de condiciones iniciales

Los valores encontrados para las constantes fueron los siguientes.

$$C1 = -0.731, C2 = 0.448, C3 = 0.226, \\ C4 = 0.448, C5 = -0.410$$

Reemplazando las constantes y los respectivos valores y vectores propios en (7), las ecuaciones diferenciales para cada estado  $P_M$ , se muestran en (7), (8), (9), (10) y (11).

$$P_1(t) = 0,465e^{-0.3104t} + 0,166e^{-0.1585t} + 0,044e^{-0.0736t} \\ + 0,177e^{0.000t} + 0,147e^{-0.0163t} \quad (7)$$

$$P_2(t) = -0,555e^{-0.3104t} + 0,120e^{-0.1585t} + 0,046e^{-0.0736t} \\ + 0,215e^{0.000t} + 0,174e^{-0.0163t} \quad (8)$$

$$P_3(t) = 0,100e^{-0.3104t} - 0,379e^{-0.1585t} - 0,029e^{-0.0736t} \\ + 0,202e^{0.000t} + 0,106e^{-0.0163t} \quad (9)$$

$$P_4(t) = -0,012e^{-0.3104t} + 0,120e^{-0.1585t} - 0,179e^{-0.0736t} \\ + 0,202e^{0.000t} - 0,132e^{-0.0163t} \quad (10)$$

$$P_5(t) = 0,001e^{-0.3104t} - 0,027e^{-0.1585t} + 0,119e^{-0.0736t} \\ + 0,202e^{0.000t} - 0,296e^{-0.0163t} \quad (11)$$

Las ecuaciones diferenciales están conformadas de una parte estable y otra transitoria, donde la estable corresponde a las probabilidades a largo plazo y las transitorias sirven para realizar predicciones a corto plazo.

Se puede observar que en cada ecuación diferencial hay un término independiente que no depende de la variación de  $t$ , estos términos son aquellos donde  $e^{0t} = 1$ , por lo tanto la constante estaría multiplicada por 1 y será siempre constante, independientemente del valor que tome  $t$ . El valor mencionado corresponde a la estabilidad del sistema y corresponderá en cada estado a la probabilidad de estado estable en cada estado  $M$ ; lo anterior significa la probabilidad con que se presentará un estado después de un  $t$  muy grande.

Por ejemplo, la probabilidad de que a largo plazo la producción se encuentre entre 459 y 600 mil sacos es de 17,7%, este porcentaje viene de la parte estable de (7)  $0.177e^{0.000t}$ . Con los datos obtenidos se puede concluir que lo más probable es que a largo plazo se produzcan entre 601 y 742 mil sacos de café, con un porcentaje del 21,5, el cual se puede observar en la parte estable de (8)  $0.215e^{0.000t}$ ; sin embargo, la probabilidad de que se produzcan los demás intervalos no está tan alejada de esta cifra. Colombia tendría la misma probabilidad de producir entre 743 y 884 (en miles) bultos de café que producir entre 1.027 y 1.168 (en miles), bultos de café; es decir que no hay una tendencia grande a que uno de los intervalos de producción sea más fuerte que otro y el panorama es incierto (Tabla 3).

### Probabilidad de estado estable y frecuencia

La frecuencia con la que se presenta un estado  $i$ , se calcula mediante (12).

$$f_i = P_i(\infty) \cdot \sum_{j=1}^n h_{ij} z \quad (12)$$

Donde  $P_i(\infty)$  representa la probabilidad de estado estable (Tabla 3).

TABLA 3. PROBABILIDADES DE ESTADO ESTABLE Y FRECUENCIA CON LA QUE SE PRESENTA UN ESTADO I

Estado	$P_i(\infty)$	$f_i$
1	0,177	0,031
2	0,215	0,038
3	0,202	0,024
4	0,202	0,012
5	0,202	0,006

Fuente: Elaboración propia.

La frecuencia se podría interpretar tomando como tiempo de observación 48 meses (4 años, el cual ha sido el tiempo en el cual Colombia ha dejado de ocupar el segundo lugar en volumen de exportación detrás de Brasil), para analizar si se dará un cambio significativo en los próximos cuatro años y la mayor frecuencia de visita de un estado se ubique en el intervalo de mayor volumen de exportación (Tabla 4).

TABLA 4. FRECUENCIA EN EL ESTADO I PARA UN PERÍODO DE CUATRO AÑOS

Estado	$f_i$
1	0,570439497
2	0,315762399
3	0,107540012
4	0,006069659
5	0,0000110673

Fuente: Elaboración propia.

Según los datos obtenidos tras los cálculos realizados, se puede ver que para un tiempo de 4 años, el estado que se visitará más veces (intervalo de producción), será el intervalo 1; por lo tanto, siendo consecuentes con la información arrojada por la herramienta matemática, se puede analizar que, dentro de cuatro años, Colombia seguirá sin cumplir las metas de exportación tanto mensuales como anuales y seguirá perdiendo puestos a nivel mundial, pues el intervalo 1 corresponde a un volumen de producción entre 459.000 y 600.000 sacos de café de 60 kg.

Es sabido que los datos mencionados en cada intervalo corresponden a un volumen de producción mensual; así, haciendo una predicción, tomando en cuenta que el estado 1 sería el estado más veces visitado en cuatro años, en la Tabla 5 se puede notar lo siguiente:

TABLA 5. PREDICCIÓN DE PRODUCCIÓN ANUAL TOMANDO LOS LÍMITES DE EXPORTACIÓN DEL INTERVALO 1

Límite inferior (en miles) (1)	Límite superior (en miles) (2)	Producción anual (1)	Producción anual (2)
459.000	600.000	5.508.000	7.200.000

Fuente: Elaboración propia.

Con resultados exactos se puede afirmar que, según los datos obtenidos tras aplicar cadenas de Markov continuas en el tiempo y discretas en el estado a la producción de café en Colombia, lo más probable es que Colombia siga sin cumplir las metas de exportación para los años siguientes, pues al conocerse que el intervalo más visitado será el uno, se pudo hacer una predicción tomando como supuesto 1 que siempre se produciría el número de bultos de café correspondiente al límite inferior del intervalo (este valor es multiplicado por 12 meses que compo-

nen el año pues los valores de producción del intervalo son mensuales); y como supuesto 2, que siempre se produciría el número de bultos de café correspondiente al límite superior del intervalo 1 (se realiza el mismo procedimiento que para el límite inferior). Tras conocer los resultados se puede observar que ambos supuestos mostraron que lo más probable es que el país no llegue a los volúmenes de exportación esperados, pues aunque se cumpliera la producción que se establece en el límite superior, la cual es la más alta del intervalo 1, la producción sería de 7.200.000 sacos, valor muy por debajo de las metas que se establecieron; de manera que esta producción sería similar a la de los años 1958-1977, período durante el cual pocas veces la producción superó los 8 millones de sacos [1]. Lo anterior, apoyado en los anuncios hechos por la revista Dinero [11], que dice que el país lleva tres años sin alcanzar los 9 millones de sacos, cuando la meta inicial eran 15 millones, demuestra la validez de los resultados pues refuerzan el conocimiento de la problemática que afecta al sector caficultor en cuanto a la producción y, por ende, la pérdida de participación en el mercado de exportación de café.

Las causas de la disminución del volumen de producción de café en Colombia se deben a diferentes factores, entre ellos las lluvias, las cuales estuvieron enmarcadas en el peor invierno que ha sufrido el país en varios años, lo cual es algo grave pues el sector caficultor

lleva mucho tiempo buscando un seguro que se acomode al sector pero no se ha encontrado ninguna empresa que asuma el riesgo, teniendo en cuenta la humedad y los ataques de la roya que han sufrido varios cafetales, lo que ha provocado grandes pérdidas, sin posibilidad de recuperación inmediata. También es de tener en cuenta que muchos de los caficultores han preferido guardar el café en vez de venderlo, esperando que los precios del mercado aumenten para obtener ganancias razonables, lo cual ha retrasado el flujo natural de comercialización.

Otra causa de la baja producción de café y, por ende, los bajos volúmenes de exportación, es que en los últimos dos años [12] se ha mantenido un ritmo continuo de renovación, lo que ha provocado que más de 230 mil hectáreas con cafetales recién sembrados se encuentren improductivas. Esto debido a que Colombia se está enfocando en crecer en la participación mundial de cafés con valor agregado [11]; es por esto que en la actualidad el 70% de las exportaciones de café corresponden a cafés especiales; el objetivo es aumentar el porcentaje un 5% más. Para lo anterior, el país ha firmado un acuerdo económico con Nespresso<sup>1</sup>, que pagará una prima de entre el 10% y 15% sobre el precio para quienes cosechen productos de la más alta calidad, lo cual puede ser un salvavidas para el medio, debido a la crítica situación actual.

1 Nespresso es la marca comercial de la compañía Nestlé Nespresso S. A., perteneciente al Grupo Nestlé. Sus productos están basados en un sistema propietario de cápsulas individuales que contienen café molido, y máquinas específicas que sean capaces de producir café a partir del contenido de la cápsula.

## CONCLUSIONES

Este proceso permite realizar predicciones futuras del comportamiento de la variable de producción de sacos de café en Colombia.

Según los valores obtenidos, el futuro no es promisorio ya que las probabilidades de estado estable muestran que lo más probable es que se produzca el estado 2, el cual se encuentra entre 601.000 y 742.000 sacos de café mensuales; además, a largo plazo, el estado que más se visitará (el que sucederá con más probabilidad), será el estado 1, el cual brinda como máximo una producción anual de 7.200.000; lo anterior muestra una baja inminente en la producción, lo que provocará un descenso en la cantidad de sacos de café exportados, problemática que requiere intervención inmediata por parte del gobierno y apoyos económicos para dinamizar el sistema.

El café fue por mucho tiempo un gran amortiguador económico para Colombia; cabe resaltar que en la actualidad el sector cafetero es un sector, en pocas palabras, vulnerado, pues no cuenta con seguros que le permitan hacer frente a las difíciles condiciones climatológicas, por lo que el costo de producción es mucho más alto que el costo de comercialización y es por esto que muchas veces este sector se ve obligado a trabajar bajo pérdida y bajo competencia desleal dado que otros países productores de café cuentan con un subsidio a la producción agrícola, lo que ocasiona que muchas veces se desvíe el flujo normal del mercado del café en Colombia.

Es importante que el país se esfuerce por mejorar las condiciones del sector caficultor para así mejorar el volumen

de producción y por ende el de exportación y poder cumplir con las metas propuestas, pues es preocupante que hoy en día muchas empresas que acostumbraban a utilizar café 100% colombiano deban utilizar mezclas (mezclan el café colombiano con café de otros países) para poder hacer frente a la demanda, pues Colombia no está cumpliendo con las cantidades requeridas; con lo que se corre el peligro de perder parte de la identidad del café colombiano y el nombre que se ha ganado en el mundo.

El proceso de Markov discreto en el estado y continuo en el tiempo permite modelar la exportación y producción de café en Colombia como una variable aleatoria indexada en el tiempo.

Este tipo de modelamiento hace posible prever el comportamiento de la producción de café a lo largo del tiempo, sea este a corto, mediano o largo plazo, para así poder preparar estrategias y alternativas a la solución de los posibles problemas.

El descenso en la producción de café y la dificultad que tienen los campesinos colombianos que se dedican a este tipo de cultivo para sobrevivir en el campo, provocará un desplazamiento de la población rural a zonas urbanas, aumentando la pobreza y el desempleo en el país.

Este es un ejemplo de aplicación real, el cual podría analizarse tomando bases de datos más amplias que permitan cálculos y predicciones más acertadas, que ayuden a buscar las posibles soluciones a los problemas de exportación de café que presenta actualmente el país.

Las cadenas de Markov discretas en el estado y continuas en el tiempo tienen una amplia aplicación en los campos de



la economía, la biología, las epidemias y la medicina, entre otros, los cuales tienen variables que se pueden modelar como una cadena de Markov de una variable aleatoria indexada en el tiempo continuo.

## REFERENCIAS

- [1] C. Cano and C. Vallejo et al., «El mercado mundial del café y su impacto en Colombia». *Borradores de Economía*. No. 710. Banco de la República, 2012.
- [2] A. Machado, *Desarrollo económico y social en Colombia: siglo XX*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2001, p. 77.
- [3] A. Giraldo, E. Toro and C. Zapata, «Modelo probabilístico para los fenómenos de transferencia entre programas de pregrado y de deserción estudiantil», *Scientia et Technica Procesos Estocásticos*, No. 39, pp. 212-217, Sept. 2008.
- [4] Y. Jordán, L.F. Lerma and E. Toro, «Aplicación de cadenas de Markov continuas a las estadísticas de secuestro en Colombia», *Scientia et Technica Procesos Estocásticos*, No. 38, pp. 235-240, Junio 2008.
- [5] Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD) and the United Nations Food and Agricultural Organization (FAO). *Agricultural Outlook, 2011-2020*. [Online]. Available: <http://www.agri-utlook.org/pages>, 2012
- [6] N. Kondamudi, K. Mohapatra Susanta and Misra Mano, "Spent Coffee Grounds as a Versatile Source of Green Energy", *Chemical and Materials Engineering*, No. 56, University of Nevada, U.S.A., 2008.
- [7] Café de Colombia. *Impacto social* [Online]. Available: [http://www.cafedecolombia.com/particulares/es/sobre\\_el\\_cafe/mucho\\_mas\\_que\\_una\\_bebida/impacto\\_social/](http://www.cafedecolombia.com/particulares/es/sobre_el_cafe/mucho_mas_que_una_bebida/impacto_social/)
- [8] Revista Dinero, Otro país que desplaza a Colombia en producción de café [Online]. Available: <http://www.dinero.com/negocios/articulo/otro-pais-desplaza-colombia-produccion-cafe/158583>
- [9] C. J. Zapata, *Análisis probabilístico y simulación*, Universidad Tecnológica de Pereira, 2007.
- [10] F. Hillier, *Investigación de operaciones*, Seventh edition, México: McGraw-Hill, 2002, p. 822.
- [11] Revista Dinero *¿Crisis del café tocó fondo?* [Online]. Available: <http://m.dinero.com/negocios/articulo/crisis-del-cafe-toco-fondo/151449>
- [12] Federación Nacional de Cafeteros de Colombia. *Colombia produjo 653 mil sacos de 60 kilos de café en octubre* [Online]. Available: [http://www.federaciondefcafeteros.org/clientes/es/sala\\_de\\_prensa/detalle/Colombia\\_produjo\\_653\\_mil\\_sacos\\_de\\_60\\_kilos\\_de\\_cafe\\_en\\_octubre/](http://www.federaciondefcafeteros.org/clientes/es/sala_de_prensa/detalle/Colombia_produjo_653_mil_sacos_de_60_kilos_de_cafe_en_octubre/)
- [13] Federación Nacional de Cafeteros de Colombia. «Estadísticas Históricas. Producción Colombiana de Café: Volumen mensual desde 1956». [online]. Available: [http://www.federaciondefcafeteros.org/static/files/Produccion\\_volumen\\_mensual.xls](http://www.federaciondefcafeteros.org/static/files/Produccion_volumen_mensual.xls)



